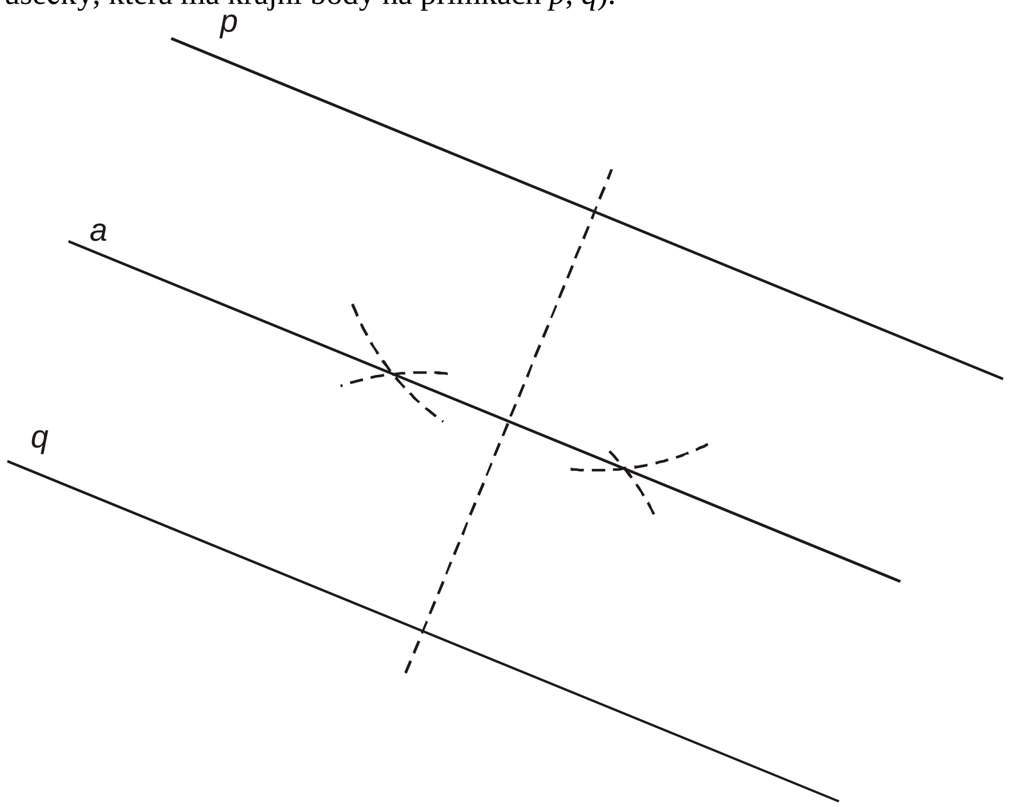
3.3.7 Množiny bodů dané vlastnosti IV

Předpoklady: 030306

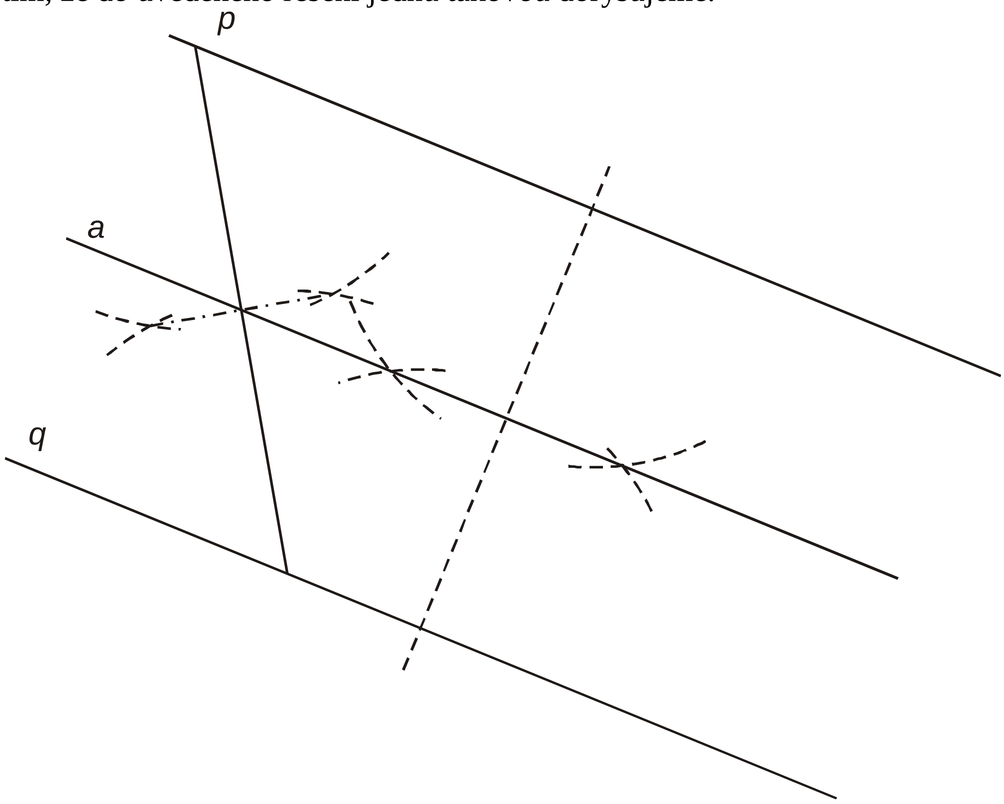
Př. 1: Jsou dány dvě rovnoběžné přímky *p* a *q*. Narýsuj množinu bodů stejně vzdálených od přímek *p*, *q*.

Body stejně vzdálené od rovnoběžných přímek *p*, *q* musí tvořit další přímku, která bude s přímkami *p* a *q* rovnoběžná a každý její bod je od přímek *p*, *q* stejně daleko (je středem úsečky, která má krajní body na přímkách *p*, *q*).



Pedagogická poznámka: Žáci nemají s řešením příkladu problém, jen často rýsují zbytečně mnoho bodů, které pak spojují do osy pásu. Při kontrole se bavíme o tom, kolik bodů musí udělat a zda musí být pomocná úsečka, jejíž střed hledají kolmá k přímkám *p*, *q* nebo ne.

Dodatek: Pomocná přímka nemusí být kolmá k přímkám *p*, *q*. Ukázat si to můžeme snadno tím, že do uvedeného řešení jednu takovou dorýsujeme.



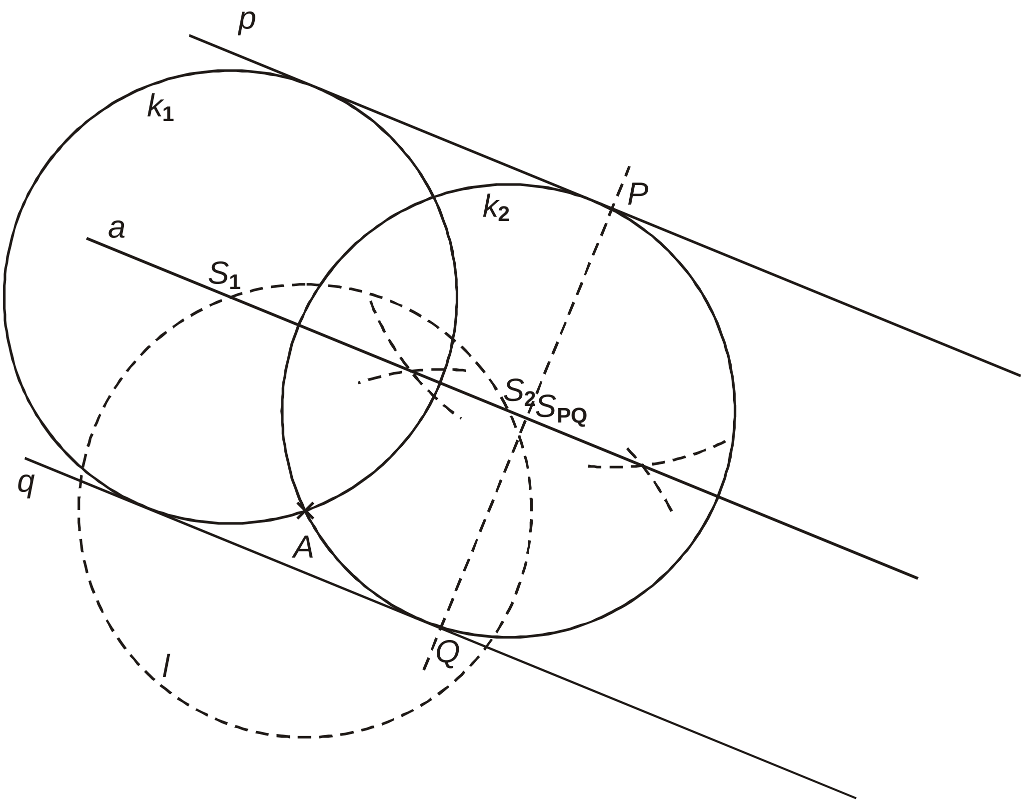
Dodatek: Nejrychlejším způsobem, jak předchozí příklad vyřešit je možnost zachycená v řešení. Pokud hledáme střed pomocné úsečky, která je kolmá, stačí využít k oba narýsované body a získáme osu úsečky, která je hledanou přímkou. Nemusíme pak řešit ani rovnoběžnost nebo kolmost hledané přímky.

Přímku, kterou jsme narýsovali jako řešení předchozího příkladu označujeme v matematice jako **osu pásu.**

Př. 2: Jsou dány dvě rovnoběžné přímky *p*, *q* a bod *A* ležící uvnitř pásu, který přímky ohraničují. Narýsuj všechny kružnice, které procházejí bodem *A* a dotýkají se obou přímek *p*, *q*.

Hledáme kružnici $\Rightarrow$ musíme najít její střed. Pro střed kružnice musí platit:

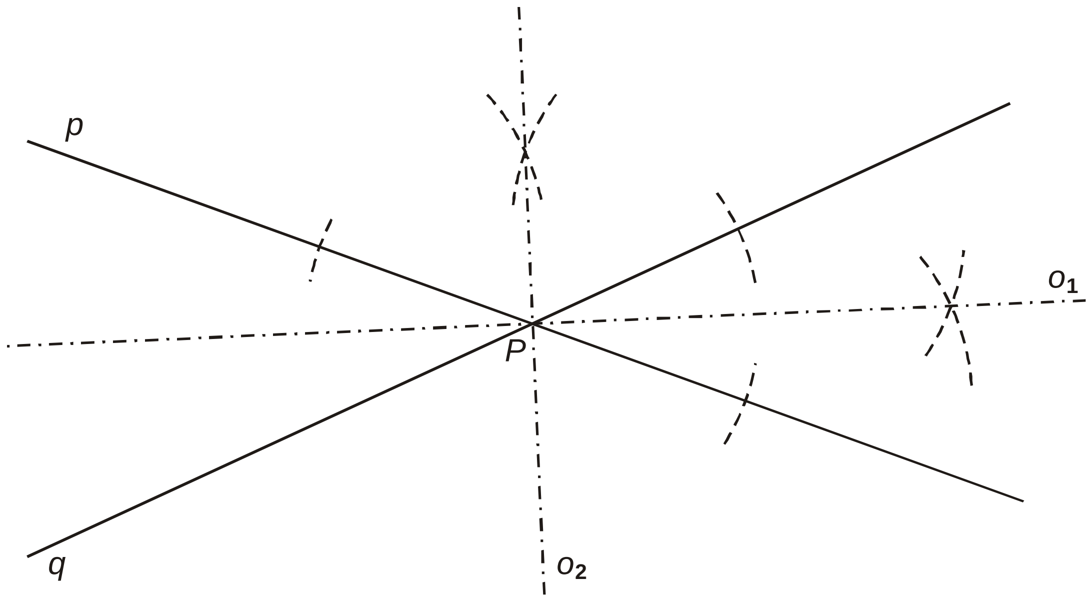
- má stejnou vzdálenost od obou přímek $\Rightarrow$ leží na ose pásu,
- prochází bodem *A* $\Rightarrow$ vzdálenost středu od bodu *A* je rovná polovině vzdálenosti obou přímek $\Rightarrow$ střed kružnice leží na kružnici se středem v bodu *A* a poloměru rovném polovině vzdálenosti obou přímek.



1. rovnoběžné přímky p, q, bod ***A*** uvnitř pásu
2. úsečka PQ kolmá na přímky p, q, $P \in p$, $Q \in q$
3. bod S_{PQ}
4. přímka a, rovnoběžná s přímkou p, $S_{PQ} \in a$
5. kružnice $l\left(A; \left|S_{PQ}P\right|\right)$
6. body $S_1; S_2$, průsečíky přímky a s kružnicí $l\left(A; \left|S_{PQ}P\right|\right)$
7. kružnice $k_1\left(S_1; \left|S_{PQ}P\right|\right)$, $k_2\left(S_2; \left|S_{PQ}P\right|\right)$

Př. 3: Jsou dány dvě různoběžné přímky p, q. Narýsuj množinu všech bodů, které mají od přímek p, q stejnou vzdálenost. Ještě předtím než začneš rýsovat přímky p, q, rozmysli si dobře, jak by měly vypadat, aby na papíru bylo vidět vše podstatné.

Přímky p, q musíme narýsovat tak, aby byl na obrázku vidět, jejich průsečík.
Body, které mají od obou přímek stejnou vzdálenost, tvoří osu úhlu (víme od chvíle, kdy jsme se osou úhlu poprvé zabývali).
Protože přímky svírají dvě dvojice úhlů, musíme narýsovat všechny osy (pro obě dvojice úhlů).

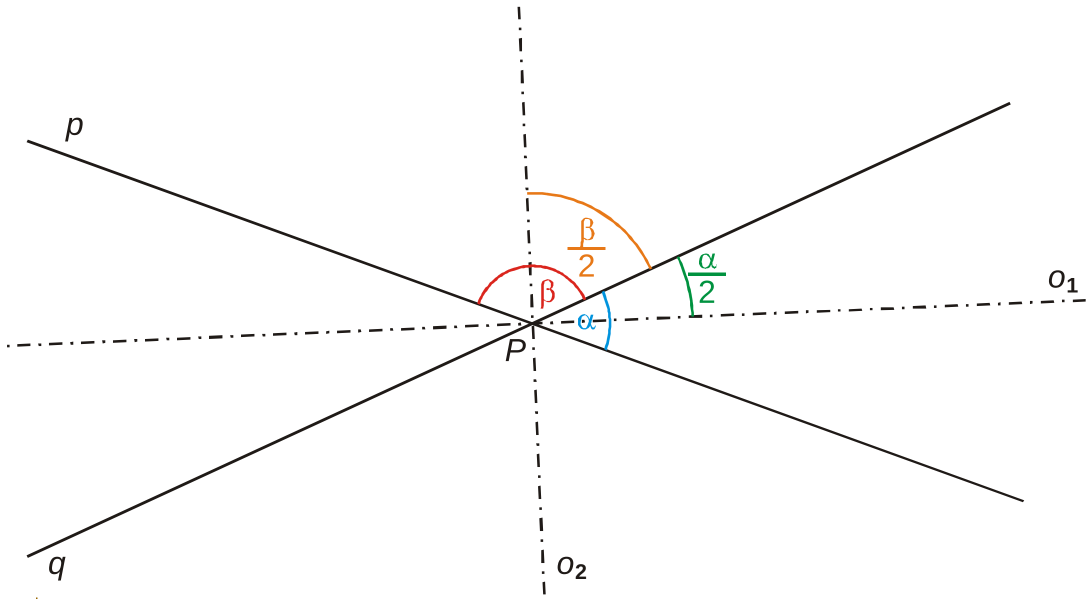


Pedagogická poznámka: Téměř bez výjimky žáci nakreslí pouze vodorovnou osu a svislou nevidí. Jakmile mají i svislé, ptám se jich, zda nevidí něco zajímavého (kolmost).

Př. 4: Prohlédni si pozorně nakreslenou množinu bodů. Co je na výsledku zajímavé? Ověř svůj postřeh. Dokaž ho.

Zdá se, že obě osy jsou navzájem kolmé.
Měřením tento postřeh potvrzuje.

Důkaz kolmosti



- Pro vyznačené úhly α a β platí: $\alpha+\beta=180°$ (dohromady tvoří přímý úhel).
- Osa úhlu dělí úhel na poloviny.

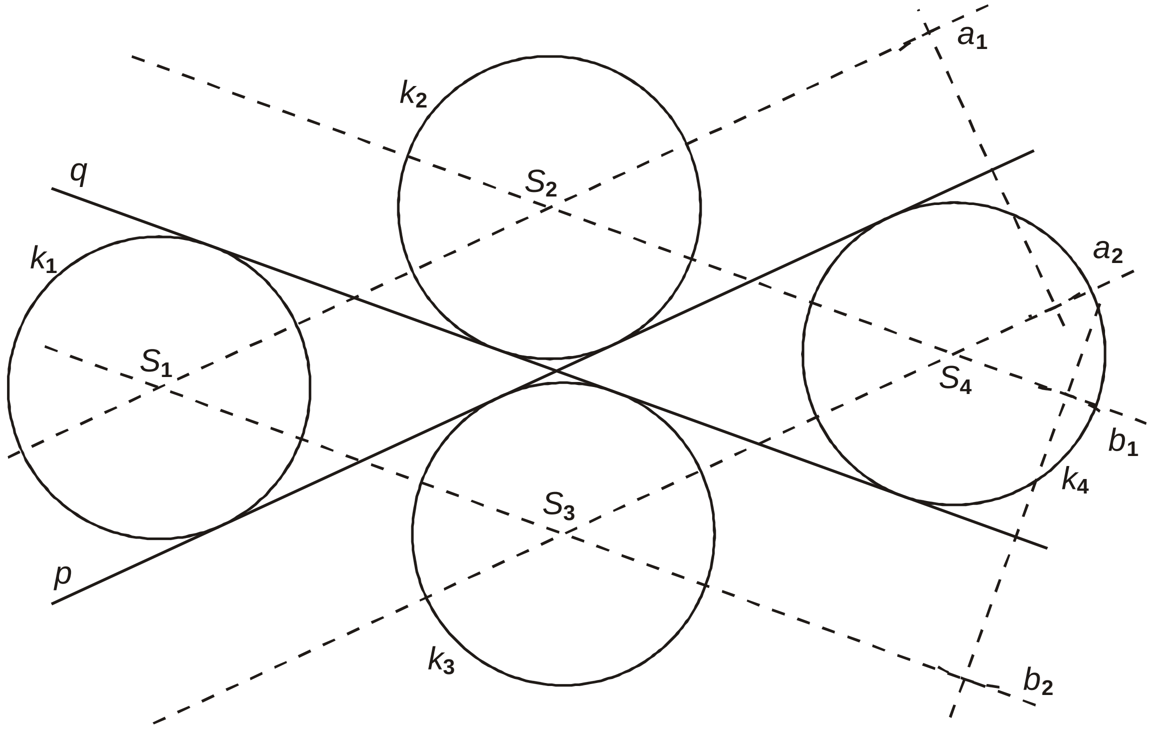
Pro úhel, který svírají obě osy platí: $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{180°}{2}=90°$.

Pedagogická poznámka: Na důkazu žáci pracují, já jim pomáhám, ale kontrolu si necháváme na počátek další hodiny, aby žáci měli možnost dobře zformulovat své nápady.

Př. 5: Jsou dány dvě různoběžné přímky *p*, *q*. Narýsuj všechny kružnice o poloměru 2 cm, které se dotýkají obou přímek.

Hledáme kružnici $\Rightarrow$ musíme najít její střed. Pro střed kružnice musí platit:

- je vzdálen od přímky *p* 2 cm (aby se kružnice přímky *p* dotýkala) $\Rightarrow$ musí ležet na přímce rovnoběžné s přímkou *p*, která jde ve vzdálenosti 2 cm od ní,
- je vzdálen od přímky *q* 2 cm (aby se kružnice přímky *q* dotýkala) $\Rightarrow$ musí ležet na přímce rovnoběžné s přímkou *p*, která jde ve vzdálenosti 2 cm od ní.



1. různoběžné přímky *p*, *q*

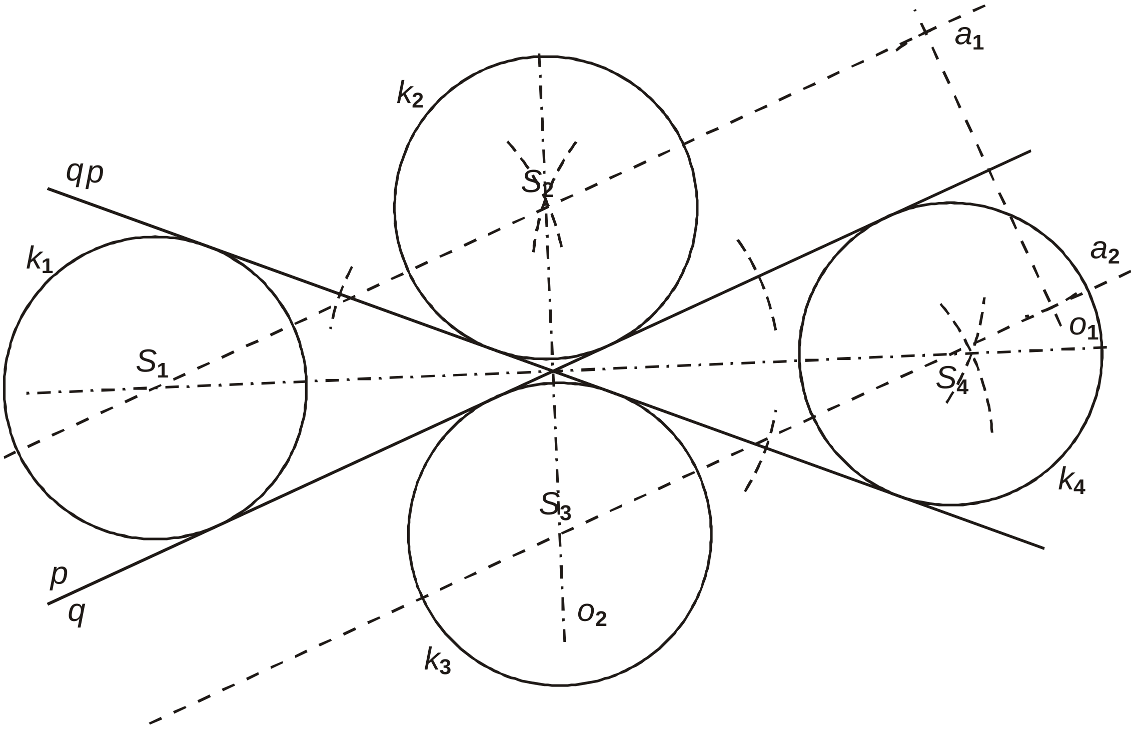
2. přímky $a_1; a_2$, rovnoběžné s *p*, vzdálené od *p* 2 cm

3. přímky $b_1; b_2$, rovnoběžné s *q*, vzdálené od *q* 2 cm

4. body $S_1; S_2; S_3; S_4$, průsečíky přímky a_x s přímkou b_x

5. kružnice $k_1(S_1; 2\,\text{cm})$, $k_2(S_2; 2\,\text{cm})$, $k_3(S_3; 2\,\text{cm})$, $k_4(S_4; 2\,\text{cm})$

Dodatek: Místo druhé (nebo první) dvojice rovnoběžek je možné narýsovat osy úhlů (množinu bodů, které jsou od obou přímek stejně vzdálené). Výsledek pak vypadá takto.



Př. 6: Je dána úsečka *AB*, $|AB| = 6\,\text{cm}$. Najdi bod *C* tak, aby obsah trojúhelníku *ABC* byl $12\ \text{cm}^2$ a strana *AC* měla délku 5 cm.

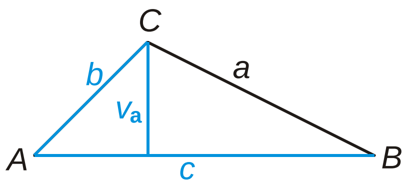
Překvapivý údaj v zadání: obsah trojúhelníku *ABC* má být $12\ \text{cm}^2$. Pro konstrukci potřebujeme znát velikosti stran, výšek, těžnic nebo úhlů. Můžeme některou z těchto informací získat ze znalosti obsahu?

Vzorec pro obsah: $S = \frac{c \cdot v_c}{2}$ $\Rightarrow$ z velikosti obsahu můžeme určit délku výšky na stranu *c*.

$$S = \frac{c \cdot v_c}{2} \quad / \cdot 2$$

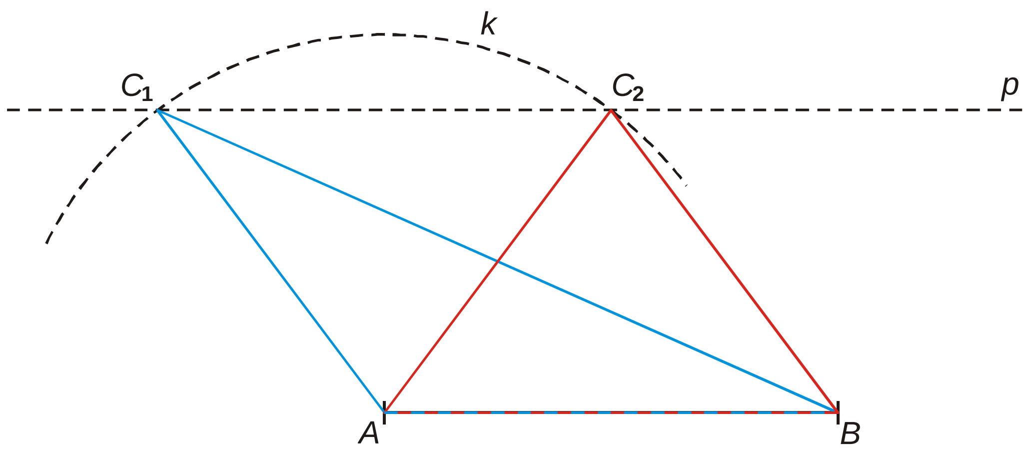
$$2S = c \cdot v_c \quad / : c$$

$$v_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 12}{6}\ \text{cm} = 4\ \text{cm}$$



Vycházíme z narýsované úsečky *AB* $\Rightarrow$ hledáme bod *C* tak, aby platilo:

- $b = 5\ \text{cm}$ $\Rightarrow$ bod *C* je od bodu *A* vzdálený 5 cm $\Rightarrow$ leží na kružnici $k(A; 5\ \text{cm})$,
- $v_a = 4\ \text{cm}$ $\Rightarrow$ bod *C* je od přímky *AB* vzdálen 4 cm $\Rightarrow$ leží na přímce, která je rovnoběžná s přímkou *AC* a je od ní vzdálená 4 cm.



1. úsečka AB, $|AB| = 6\ \text{cm}$

2. kružnice $k(A; 5\ \text{cm})$

3. přímka p, rovnoběžná s přímkou AB, vzdálenost od AB je rovna $v_c = 4\ \text{cm}$

4. body C_1, C_2, průsečíky přímky p s kružnicí k

5. trojúhelník ABC

Shrnutí: